Toolbox Lehrerbildung
Department Educational Science
School of Social Science and Technology
Technische Universität München

Transkript des Unterrichtsvideos im Modul

Motivationale Aktivierung

Problemlösen

Quadrat- und Dreieckszahlen

Teach@TUM wird im Rahmen der gemeinsamen „Qualitätsoffensive Lehrerbildung" von Bund und Ländern aus Mitteln des Bundesministeriums für Bildung und Forschung gefördert.

GEFÖRDERT VOM
Bundesministerium für Bildung und Forschung

Szene 1: Erarbeitung der Bildungsgesetze von Quadratzahlen

00:05: Lehrer: Guten Morgen zusammen.

00:06: Schüler: Guten Morgen.

00:08: Lehrer: Heute möchte ich mir mit euch zusammen mal die Quadratzahlen ein kleines bisschen genauer anschauen und dabei liegt es mir ganz besonders am Herzen, euch zu zeigen, dass selbst hinter so unspektakulär wirkenden Dingen wie den Quadratzahlen, manchmal wirklich überraschende Zusammenhänge stecken.

00:28: Und es liegt mir auch am Herzen euch zu zeigen, dass Mathematik, zumindest manchmal, richtig Spaß machen kann.

00:37: So um damit jetzt loslegen zu können, brauchen wir jetzt erst einmal eine Liste der Quadratzahlen. Diktiert mir doch gleich mal schnell die ersten 10 Quadratzahlen, Laura fang du doch mal gerade damit an.

00:49: Laura: Äh, Quadratzahlen...ja äh, was war das noch einmal?

00:58: Lehrer: Komm schon, das ist jetzt wirklich Grundschulstoff.

01:00: Laura: Ja Mensch, keine Ahnung, lassen Sie mich halt kurz überlegen.

01:04: Lehrer: Julia kannst du mal kurz aushelfen?

01:06: Julia: Klar. Quadratzahlen kennen wir ja schon ewig.

01:08: 1 * 1 = 1; Das ist die erste Quadratzahl. Dann kommt 4 das ist 2 * 2. 3 * 3 = 9. 4 * 4 = 16. Und immer so weiter.

01:21: Lehrer: Klasse das sind genau die Zahlen, mit denen wir jetzt arbeiten wollen. Ich vervollständige die Liste jetzt mal bis zehn hier. Klingelt es bei dem Rest jetzt auch wieder mit den Quadratzahlen, so ein bisschen? Ja?...Gut!

01:40: So. Wir haben jetzt hier also die Quadratzahlen. Zusammen mit einer Möglichkeit der Bildung an der Tafel stehen.

01:51: Ich möchte heute mit euch versuchen, herauszufinden ob man die Quadratzahlen auch noch auf ganz andere Art und Weise bilden kann und zwar komplett ohne Multiplikation. Das heißt also nur mit Addition, Subtraktion und Division zum Beispiel.

02:09: Versucht mal herauszukriegen, ob ihr in den Quadratzahlen noch ein Bildungsgesetz seht, dass überhaupt nichts mit Multiplikation zu tun hat. Ihr dürft jetzt gerne damit anfangen so ein bisschen herumzurätseln und tauscht euch auch gern mit eurem Banknachbarn ein bisschen aus.

02:31: Sarah: Hä? Was war die Aufgabe? Wir sollen doch die Zahlen anschauen und irgendwas mit Plus und Minus machen?!

02:36: Oh man, ich check halt mal wieder nichts!

02:39: Annika: Jetzt gib halt nicht gleich schon wieder auf, wir kriegen das schon hin.

02:47: Sarah: Herr Becker?!

Teach@TUM wird im Rahmen der gemeinsamen „Qualitätsoffensive Lehrerbildung" von Bund und Ländern aus Mitteln des Bundesministeriums für Bildung und Forschung gefördert.

GEFÖRDERT VOM
Bundesministerium für Bildung und Forschung

02:47: Lehrer: Ja?

02:48: Sarah: Ähm, wir sind uns irgendwie nicht sicher was wir machen sollen. Was ist denn ein Bildungsgesetz?

02:52: Lehrer: Kein Problem. Also bei einem Bildungsgesetz da würdet ihr im Prinzip eine Regelmäßigkeit in den Zahlen entdecken können.

03:02: Probiert doch mal wie ihr zum Beispiel durch eine Addition, Subtraktion oder eine Division von einer Zahl zur nächsten Zahl kommen könntet.

03:13: Annika: Also zum Beispiel Plusrechnen?

03:14: Lehrer: Zum Beispiel Plusrechnen. Macht mal.

03:17: Annika: Ok also, fangen wir mal an bei der Eins. Also 1 + 4 = 5 und nicht 9 und 4 und 9 macht 13, aber nicht 16. Also das Addieren von den Zahlen funktioniert schonmal nicht.

03:32: Lehrer: Ja. Dann müssen wir halt die Hypothese verwerfen, dass man durch Addieren der Quadratzahlen weiterkommt. Oder?

03:41: Annika: Ja.

03:42: Lehrer: Ja dann...versucht doch jetzt mal zu überlegen, wenn ihr von einem Schritt auf den nächsten geht, welche Zahl ihr da dann dazu addieren müsst.

03:53: Sarah: Von 1 auf 4 ist es plus 3; von 4 auf 9 ist es plus 5; von 9 auf 16 ist es plus 7. Was sagt das jetzt?

04:04: Lehrer: Ja schaut mal hin. Das sind doch genau, die aufeinander folgenden, ungeraden Zahlen. Ok?

04:14: Das heißt, die Regel lautet: Addiere ungerade Zahlen. Das schreibt ihr euch jetzt am besten gleich mal so ins Heft rein.

04:24: Sehr schön.

04:29: Lehrer: Und seid ihr schon weitergekommen?

Szene 2: Besprechung der Problemlöseaufgabe zur Bildung von Quadratzahlen

00:05: Lehrer: So, dann lasst doch mal hören auf welche Ideen ihr so gekommen seid. Ich hab ja da einige spannende Ansätze gesehen. Julia?

00:14: Julia: Also wir haben der Reihe nach alle möglichen Rechenarten durchprobiert und sind dabei dann bei der Addition auf etwas gestoßen, wobei wir die Abstände der Quadratzahlen angeschaut haben.

00:23: Lehrer: Sehr gut. Wer kann sich denken, was die Julia jetzt hier meint? Wem ist bei den Abständen noch etwas aufgefallen? Ja Annika?

00:35: Annika: Die Abstände zwischen den einzelnen Quadratzahlen sind immer die ungeraden Zahlen, also von 1 zu 4 ist es 3 und von 4 zu 9 ist es 5 und so weiter.

Teach@TUM wird im Rahmen der gemeinsamen „Qualitätsoffensive Lehrerbildung" von Bund und Ländern aus Mitteln des Bundesministeriums für Bildung und Forschung gefördert.

GEFÖRDERT VOM
Bundesministerium für Bildung und Forschung

00:45: Lehrer: Sehr gut. Ganz genau und das Lob geht hier an viele im Raum, weil ich habe die gleiche Idee bei ganz vielen von euch im Heft gesehen.

00:53: Also mit dem Wissen, das wir jetzt haben, wie können wir jetzt versuchen zum Beispiel hier die 25 auf ganz regelmäßige und geschickte Art und Weise als Summe von Zahlen zu schreiben?

01:11: Ja Katharina?

01:13: Katharina: Wenn man jetzt die 1, 3, 5, 7 und 9 addiert dann würde 25 rauskommen. Das sind alles ungerade Zahlen, um genau zu sein die ersten 5.

01:27: Lehrer: Perfekt. Also scheinbar ist es so, als ob man die Quadratzahlen als Summe von ungeraden Zahlen schreiben kann. Das halte ich uns jetzt gleich mal hier auf der linken Seite von der 25 fest.

01:41: Also 25=1+3+5+7+9 und da können wir guten Gewissens noch ein Gleichheitszeichen dazwischen schreiben.

01:54: Ja. Sieht so aus, als ob wir die Quadratzahlen als die Summe der ersten ungeraden Zahlen schreiben könnten. Testet es doch mal für die 100 und vervollständigt überhaupt mal den Hefteintrag selbstständig, indem ihr neben die Zahlen die entsprechenden Summen schreibt.

Szene 3: Wecken der Beweisbedürftigkeit und Bearbeitung der Problemlöseaufgabe in der Gruppe

00:06: Lehrer: So jetzt haben wir also unsere Zahlen hier vorne an der Tafel und bei euch in den Heften stehen und es sieht jetzt für uns jetzt so aus, als ob es wirklich generell so ist, dass sich die Quadratzahlen als die Summe aufeinanderfolgender, ungerader Zahlen bilden lassen.

00:26: Rein faktisch können wir das jetzt allerdings nur für die ersten zehn Quadratzahlen so sagen. Es ist ja bei der Mathematik so, dass wir es jetzt nicht mit einer "Glaubensgemeinschaft" zu tun haben, sondern die Mathematik ist eine Wissenschaft...

00:38: ...und bei der kommt es am Ende darauf an, dass wir Dinge ganz, ganz bombensicher sagen können und deshalb müssen wir uns jetzt als nächstes fragen, wie wir einen Beweis für unsere eben aufgestellte Vermutung finden können.

00:55: Ja und für den Zweck habe ich gestern einmal den Duplosteinevorrat meiner Tochter geplündert und für euch mitgebracht.

01:06: Ja, die können uns nämlich jetzt dabei helfen. Die Aufgabe ist es jetzt nämlich als nächstes einen Beweis in Form einer Visualisierung für unsere eben aufgestellte Vermutung zu finden.

01:21: Die Pärchen mixen wir jetzt allerdings mal ein bißchen durch. Phillip du gehst jetzt am besten jetzt mal zur Laura...und Katharina du gehst mal dahin..ja…und ihr zwei könnt bleiben. Ich denke ihr zwei, ihr wechselt auch gerade nochmal am besten...und ihr könnt bleiben. Passt so.

01:50: So, wenn jetzt jeder von euch einen Satz...seid mal ein bisschen ruhiger! Wenn jetzt jeder von euch einen Satz Duplos bekommen hat, dann versucht ihr als erstes mal die Quadratzahl 16 in ein möglichst regelmäßiges Muster mit euren Farben zu legen.

02:07: Lehrer: So ihr könnt jetzt auspacken und loslegen.

02:10: Packt aus, legt Muster! Sehr schön. Auspacken, meine Damen!

Teach@TUM wird im Rahmen der gemeinsamen „Qualitätsoffensive Lehrerbildung" von Bund und Ländern aus Mitteln des Bundesministeriums für Bildung und Forschung gefördert.

GEFÖRDERT VOM
Bundesministerium für Bildung und Forschung

02:26: Ähm Julia. Nimm dich mal so ein ganz kleines bisschen zurück. Das ist zwar ganz nett, dass du Katharina so auf deine Art helfen willst, aber ich bin sicher Katharina findet auch selbst einen Ansatz, oder?

02:41: Katharina was meinst du? Schau dir doch mal die Steine an. Es geht jetzt darum die Zahl 16 zu legen. Also schau dir doch mal die Steine hier an und...?

02:50: Katharina: Ich würde einfach mal mit den Blauen anfangen, weil das am meisten sind. Das sind 7.

02:56: Und die einfach schonmal so außenrum legen.

02:59: Lehrer: Genau leg mal so eine Außenseite von einem Quadrat. Cool!

03:04: Katharina: Und dann...nur noch ausfüllen eigentlich, oder?

03:05: Lehrer: Ja dann mach das mal, mach mal in der Richtung weiter. Ist doch ganz gut….. Das ist auf einem guten Weg jetzt.

03:20: Katharina: Jetzt haben wir schon mal ein Quadrat, aber irgendwie sieht das noch nicht so gut aus.

03:24: Ich finde das Muster ist nicht so schön. Ich glaube, das müssten wir nochmal ändern.. Vielleicht einfach anders sortieren? Was denkst du?

03:33: Julia: Ja ich glaube das ist eine ganz gute Idee. Lass uns das einfach mal versuchen.

03:39: Annika: Also wir müssen jetzt Quadrate legen.. sortieren wir vielleicht erstmal.

03:46: Die Blauen sind die meisten, dann die Grünen, die Gelben und den Roten.

03:51: Also ich würde mal wieder mit dem Kleinsten anfangen.. das hat uns ja vorher auch geholfen.

03:56: Dann haben wir schon mal ein Quadrat, also würde ich sagen eins Quadrat ist eins. Jetzt müssen wir halt irgendwie aus den Gelben ein größeres Quadrat machen.

04:08: Aaaahh, wir können es vielleicht hier einfach außen rum legen? So?!

04:15: Das klappt ja schon mal. Also dann müsste das ja eigentlich mit den Grünen auch gehen….ja

04:27: Perfekt!

04:29: Sarah: Hä das hab ich jetzt nicht verstanden. Was machst du denn da?

04:33: Annika: Ja wir haben doch vorhin festgestellt, dass man jede Quadratzahl als Summe von ungeraden Zahlen darstellen kann und wir haben jetzt hier praktisch für jede weitere ungerade Zahl eine neue Schicht in unserem Quadrat.

04:46: Sarah: Achso! Ja ok, ja klar, das macht Sinn!

04:50: Annika: Dann können wir noch die blaue Schicht hinlegen.

Teach@TUM wird im Rahmen der gemeinsamen „Qualitätsoffensive Lehrerbildung" von Bund und Ländern aus Mitteln des Bundesministeriums für Bildung und Forschung gefördert.

GEFÖRDERT VOM
Bundesministerium für Bildung und Forschung

Szene 4: Einführung der Dreieckszahlen und deren Visualisierung in Gruppenarbeit

00:05: Lehrer: Ok, wir haben also jetzt mithilfe unserer Bausteine bewiesen, dass es generell so ist, dass wir die Quadratzahlen durch das Aufsummieren der ersten ungeraden Zahlen erhalten.

00:18: Soweit sind wir schon mal. Jetzt ist es aber ehrlich gesagt nicht gerade das Naheliegendste ungerade Zahlen aufzuaddieren. Das gebe ich ehrlich zu. Also wenn ich Zahlen aufaddieren würde, dann würde ich einfach von vorne anfangen und nicht zwischen gerade und ungerade unterscheiden.

00:36: Also sowas wie Eins; Eins plus Zwei; Eins plus Zwei plus Drei; Eins plus Zwei plus Drei plus Vier; und so weiter.

00:48: Ok und wenn ich das jetzt so mache, dann kommt ja auch irgendwas raus.

00:53: Und jetzt mein Auftrag an euch: Versucht mal, wie wir das vorher bei den Quadratzahlen gemacht haben, für diese Zahlen, die da jetzt rauskommen, eine Visualisierungsmöglichkeit zu finden.

01:06: Ok? Ihr guckt so ein bisschen verwirrt. Ok ok ok, also nochmal wir haben die Zahlen Eins plus Zwei plus Drei plus Vier und so weiter und die sollt ihr jetzt visualisieren und jetzt fangen wir mal gemeinsam an.

01:23: Von welchen Zahlen reden wir denn jetzt eigentlich? Wartet mal...machen wir hier mal ein bisschen Platz.

01:34: So! Welche Zahlen sind denn das? Julia?

01:39: Julia: Also wenn ich einfach die Zahlen addiere, dann komme ich auf 1; 1 + 2 = 3;

01:43: Lehrer: Mach mal langsamer, dann kann ich auch mitschreiben. Also wir bekommen zuerst die 1.

01:50: Julia: 1 + 2 = 3; 1 + 2 + 3 = 6; plus 4 ist 10;

02:09: Lehrer: Gut jetzt haben wir die Zahlen schonmal hier vorne stehen. Das gibt uns doch schonmal einen Einstieg in die Sache und jetzt versucht mal eben genau wie bei den Quadratzahlen eine Visualisierungsmöglichkeit für diese Zahlenreihe hier zu finden.

02:27: und ich gebe euch dazu jetzt ein paar zusätzliche Duplosteine aus. Bildet bitte Vierergruppen diesmal, weil so viele Steine hatte meine Tochter jetzt auch nicht.

02:39: Äh bildet Vierergruppen und ein kleiner Tipp: Einen von den hellblauen Steinen braucht ihr jetzt im Moment erstmal noch nicht.

02:45: Macht ihr eine Vierergruppe? Ihr macht eine Vierergruppe...

02:52: Lehrer: Wunderbar, da sind doch jetzt einige spannende Ergebnisse zusammengekommen.

02:56: Ich habe euch ja vorhin die iPads ausgeteilt. Jetzt macht mal von den Steinen ein Foto und schickt mir das schnell nach vorne.

03:04: Jetzt macht die iPads auf, da ist eine Foto App drauf, damit könnt ihr fotografieren. Am besten möglichst von oben drauf.

03:12: Und dann geht ihr auf eine Foto App und schickt mir das per Airdrop nach vorne.

03:21: Schafft ihr? Geht? Sehr schön.

03:25: Wunderschön. Ah da ist was angekommen! Cool, Cool, Cool.

Teach@TUM wird im Rahmen der gemeinsamen „Qualitätsoffensive Lehrerbildung" von Bund und Ländern aus Mitteln des Bundesministeriums für Bildung und Forschung gefördert.

GEFÖRDERT VOM
Bundesministerium für Bildung und Forschung

03:30: Annehmen. Hey da kommen Bilder rein! Sehr schön. Müsste eigentlich noch eines reinkommen. Sehr schön! Super.

03:39: Jetzt sehen wir hier bloß nichts. Ich mach hier gleich mal das Licht aus, dann sehen wir ein bisschen besser. Sehr schön.

03:47: Ja da haben wir doch ein paar ganz spannende Bilder reingekriegt.

03:52: Das Bild hier, aus welcher Gruppe kommt das? Kann da mal jemand vorkommen und uns euren Ansatz erklären? Phillip machst du?

04:00: Phillip: Ja genau das ist unseres. Wir haben uns überlegt; das Muster kann man eigentlich schon schön in so einer Pyramide darstellen.

04:11: Wenn man jetzt die Ebenen einfach zusammenzählt dann hat man wieder hier 1 + 2 = 3 plus nochmal 3 ist dann 6 und so weiter und dann kommt man auf die Zahlen von vorher.

04:26: Lehrer: Sehr schön. Kannst dich gerne wieder setzen. Das gleiche Bild nur ein kleines bisschen bunter habe ich noch irgendwo gesehen. Das kam von euch, gell? Aha.

04:36: Äh dann ist mir das noch aufgefallen. Das war dann wahrscheinlich eure Gruppe oder?

04:42: Annika: Ja, soll ich es machen?

04:43: Lehrer: Annika komm doch mal vor und erklär was ihr gemacht habt.

04:50: Annika: Genau also wir haben erstmal unsere Duploklötzchen nach Farben sortiert und dabei ist uns schon gleich aufgefallen, dass wir das in so eine Treppe bilden können. Wenn man ja immer einen Stein mehr dazu legt.

05:03: Und in Verbindung mit dieser Zahlenreihe, die wir vorher gemacht haben sieht man, dass hier auch, denn zum Beispiel haben wir an dritter Stelle die 6 und hier an dritter Stelle diesen gelben Streifen mit drei Steinen.

05:16: Und 3 + 2 + 1 = 6.

05:21: Lehrer: Super. Sehr schön. Kannst dich gerne wieder setzen. So jetzt haben wir die zwei Bilder gesehen. Das hier und das hier. Was haben denn die beiden Bilder miteinander gemeinsam?

05:32: Guckt mal genau hin. Ah viele Ideen! Ja Katharina?

05:36: Katharina: Sie haben irgendwie immer eine Dreiecksform.

05:39: Lehrer: Dreiecksform. Das ist schonmal richtig. Gut beobachtet. Phillip?

05:45: Wenn man jetzt, wie vorher die Zahlen in einem Quadrat anordnen könnte, wenn man die Quadratzahlen genannt hat, heißen die dann jetzt Dreieckszahlen?

05:56: Lehrer: Dreieckszahlen. Cool. Richtig! Gedacht wie ein wahrer Mathematiker.

06:00: Phillip: Wirklich?

06:01: Lehrer: Die heißen tatsächlich so. Dreieckszahlen.

Teach@TUM wird im Rahmen der gemeinsamen „Qualitätsoffensive Lehrerbildung" von Bund und Ländern aus Mitteln des Bundesministeriums für Bildung und Forschung gefördert.

GEFÖRDERT VOM
Bundesministerium für Bildung und Forschung

Szene 5: Arbeitsphase mit anschließender Besprechung

00:05: Lehrer: So jetzt haben wir ja die Quadratzahlen als Ergebnis einer Multiplikation sowieso schon immer gekannt.

00:12: Und wir haben uns heute zusätzlich erarbeitet, die auch noch als eine Summe darzustellen.

00:18: Die Dreieckszahlen die haben wir jetzt erstmal als Summe gleich kennengelernt. Jetzt möchte ich den Spieß mal umdrehen und ich möchte versuchen, ob wir nicht auch die Dreieckszahlen als Ergebnis von einer Multiplikation darstellen können.

00:36: Versucht mal mit euren Duplosteinen das Produkt von n und n+1 zu legen. Also testet das mal mit so ein paar Zahlen, zum Beispiel mit 3 und 4 und ihr dürft jetzt auch gerne alle Duplosteine verwenden, falls ihr das von den Farben her so braucht.

00:57: Also wir sind jetzt los nach n*(n+1). So, fangt mal an.

01:13: Mhm. Ja das sieht doch schonmal ganz gut aus. Die 3 mal 4 Rechtecksstruktur habt ihr schonmal gefunden.

01:23: Jetzt guckt doch nochmal drauf, ob ihr da drin nochmal ein anderes Muster seht. Vielleicht mit den Farben ein bisschen rumspielen und habt dabei immer im Hinterkopf, dass wir ja eigentlich die Dreieickszahlen darstellen wollen. Ok? Probiert mal.

01:40: Annika: Super. Haben wir ja vier mal drei. Passt ja!

01:44: Lehrer: Ah das sieht doch sehr schön aus. Nehmt das doch gleich mal und legt es da vorne so unter das iPad, weil das brauchen wir nachher noch einmal.

01:52: Annika: Ja ich würde es machen.

01:54: Lehrer: Annika ja?

02:07: So, da haben wir doch jetzt wieder ein ganz super Ergebnis!

02:11: Wer im Raum könnte da noch ein bisschen was dazu sagen.. zu dem was wir hier gerade sehen? Ja, Julia!

02:18: Julia: Also hier wurden nur zwei Farben genommen und dann das Rechteck symmetrisch geteilt

02:23: und dann hat man sechs von jeder Farbe und Sechs ist ja auch eine Dreieckszahl.

02:26: Lehrer: Ja klasse! Also besteht unser Rechteck hier aus zwei Dreieckszahlen.

02:33: Ist das jetzt immer so oder ist das Zufall? Klappt das für jede von unseren Zahlen?

02:39: Was meint ihr dazu.. eine Idee? Annika du hast gelegt. Hast du eine Idee?

02:45: Annika: Mh, also ich denke schon dass es immer klappt.

02:54: Denn wenn ich es jetzt zum Beispiel auf zwei Streifen reduziere, also hier drei Blaue und drei Grüne wegnehme,

03:06: dann habe ich hier die zwei Streifen. Und zwei mal die Dreieckszahl drei. Also ein Mal hier bei den Blauen drei und bei den Grünen drei.

03:21: Lehrer: Wie ist es, wenn du es weiter machst?

03:23: Annika: Wenn ich jetzt erstmal wieder zurückgehe, zur Sechs, dann könnte ich ja von dort aus zur nächsten Dreieckszahl Zehn kommen,

03:39: indem ich einfach jeweils vier weitere Steine anlege..

Teach@TUM wird im Rahmen der gemeinsamen „Qualitätsoffensive Lehrerbildung" von Bund und Ländern aus Mitteln des Bundesministeriums für Bildung und Forschung gefördert.

GEFÖRDERT VOM
Bundesministerium für Bildung und Forschung

03:59: Also ich hab jetzt hier meine Viererreihe, die ich hier hinzufüge.

04:09: Und eben noch eine auf der anderen Seite.

04:16: Und…jetzt hab ich ja dann hier sechs grüne Steine plus die vier Gelben ergeben ja dann wieder die Dreieckszahl Zehn.

04:26: Also habe ich hier einmal die Dreieckszahl Zehn und hier nochmal das Gleiche mit den blauen und den gelben Steinen.

04:33: Lehrer: Ja super Annika! Prima verstanden und auch ganz klasse erklärt!

04:38: Also kann sich das, kannst Dich jetzt gern wieder setzen, kann sich das jetzt jeder vorstellen, was sie eben gemeint hat?

04:43: Also stellt euch im Prinzip diese Zahlen hier oder diese Steine auch als grün vor und stellt euch die hier auch als blau vor.

04:51: Und dann habt ihr beim Übergang von einer Dreieckszahl zur nächsten wieder ein Rechteck bekommen

04:58: und zwar eines der Form n*(n+1). Also die Fläche lässt sich wieder als n*(n+1) berechnen.

05:07: Und das jetzt aus zwei Dreieckszahlen zusammen gesetzt ist. Also wir können jetzt im Prinzip hier in unserer Formel schreiben:

05:16: Dieses n*(n+1) ist gleich zwei mal D, wobei das D die Dreieckszahl ist, die in unserer Visualisierung ja doppelt vorkommt.

Szene 6: Sicherung und Beweisführung der Dreieckszahlen

00:05: Lehrer: So, wir hatten ja jetzt zum besseren Verständnis nochmal die Farben ausgetauscht.

00:09: Und wir können an dem Bild jetzt noch etwas ganz anderes entdecken, noch eine ganz andere spannende Sache.

00:15: Ich nehm jetzt mal die vier Steine hier weg. Was bleibt denn dann übrig?.. Vorschlag?

00:25: Katharina: Ja jetzt haben wir wieder genau so ein Quadrat wie vorher.

00:27: Lehrer: Genau, und wie ist das Quadrat zusammengesetzt.. Phillip ?

00:34: Phillip: Ja aus zwei Dreiecken, also jetzt zwei Dreieckszahlen.. wie cool!

00:40: Zwei Dreieckszahlen... klappt das denn immer? Oder ist das hier nur Zufall, könnt ihr das mal für die anderen Quadratzahlen ausprobieren?!

00:49: Moment, wir haben ja hier unsere Quadratzahlen!

00:54: So.. und wir haben jetzt hier gesehen, die 16 = 6+10. Wie sieht es mit den anderen aus? Sarah?

01:10: Sarah: Also, 1 ist einfach 1. 4=1+3, 9 sehen wir ja da, das ist 6+3.

01:22: Lehrer: Ich sortier mal um dann machen wir die 3+6 dann steht immer die Kleinere vorne.

01:26: Sarah: Ja, 16 = 10+6, 25 = 15+10 ... und ja.

Teach@TUM wird im Rahmen der gemeinsamen „Qualitätsoffensive Lehrerbildung" von Bund und Ländern aus Mitteln des Bundesministeriums für Bildung und Forschung gefördert.

GEFÖRDERT VOM
Bundesministerium für Bildung und Forschung

01:35: Lehrer: Machen wir 10+15. Macht das doch jetzt mal so weiter, dann entdeckt ihr bestimmt ein Muster.

01:42: Hat jemand eine Idee was hier passiert? Annika?

01:47: Annika: Also es ist ja so, dass man vom Prinzip her immer eine Dreieckszahl mit der davor addiert.

01:54: Lehrer: Genau!

01:55: Annika: Also für die 36 hätte man jetzt 15+21 und dann die 49 = 21+28. Die nächste ist 28+36. Ja die 81 = 36+45.

02:31: Lehrer: Und die nächste mache ich selber, die kann ich im Kopf. Das ist die 45+55. Und die 55 ist auch eine Dreieckszahl.

02:41: So jetzt sind wir wieder so weit, dass wir hier eine Vermutung stehen haben, die anscheinend sehr schön funktioniert.

02:51: Eine Quadratzahl lässt sich immer als Summe von zwei aufeinanderfolgenden Dreieckszahlen schreiben.

03:00: Jetzt müssen wir uns natürlich wieder fragen, stimmt das denn immer so oder ist das Zufall? Können wir das mit Formeln wirklich bombensicher beweisen?

03:09: Naja zumindest eine Formel für die Dreieckszahlen hatten wir ja schon mal. Und zwar hier.. fast zumindest!

03:23: Ja Phillip?

03:24: Phillip: Naja für eine Dreieckszahl muss man jetzt noch die 2 herüberziehen, da teilt man einfach dadurch. Dann hat man dastehen n*(n+1)/2

03:39: Und jetzt muss man eigentlich nur noch die Vorgänger-Dreieckszahl addieren.

03:46: Die Vorgänger-Dreieckszahl.. die müssen wir jetzt natürlich auch wieder durch eine Formel ausdrücken..

03:52: Ich nenn die mal Dn-1, die hier nenn ich mal Dn. Was müsste jetzt dastehen? Annika?

04:00: Annika: Ja man muss ja eigentlich das n durch (n-1) ersetzen?

04:05: Lehrer: Genau, und dann steht da was?

04:07: Annika: Also (n-1)*(n-1+1) also einfach nur n.

04:14: Lehrer: Eigentlich n! Und das wieder durch 2..

04:18: Annika: Genau!

04:20: Lehrer: Und dann müssen wir die beiden Dreieckszahlen jetzt dann noch addieren, weil das sehen wir jetzt hier in unserer Visualisierung.

04:29: Also wir wollen ausrechnen: Dn+ (Dn-1) und das Ganze das müssen wir jetzt dann noch einsetzen und zusammenfassen und vereinfachen und das macht ihr jetzt einfach mal alle selbst in euren Heften.

04:49: So und im letzten Schritt müssen wir jetzt hier noch die Zwei herauskürzen.. und was bleibt dann übrig?!

04:59: Philipp: Ne da kommt echt n hoch zwei raus. Also n Quadrat?

05:04: Lehrer: Ja

05:04: Philipp: Wow!

Teach@TUM wird im Rahmen der gemeinsamen „Qualitätsoffensive Lehrerbildung" von Bund und Ländern aus Mitteln des Bundesministeriums für Bildung und Forschung gefördert.

GEFÖRDERT VOM
Bundesministerium für Bildung und Forschung

05:06: Lehrer: Faszinierend gell? n Quadrat! Und wir haben dabei einen ganz richtigen ordentlichen mathematischen Beweis geführt!

Szene 7: Spannendes über Quadrat- und Dreieckszahlen

00:05: So jetzt ganz zum Schluss möchte ich euch noch eine kleine Anekdote erzählen und zwar von dem großen Mathematiker Karl Friedrich Gauß.

00:14: Wie gesagt, der war ein großer Mathematiker, aber als der noch zur Schule ging, da hatte sein Lehrer so ein bißchen seine Mühe mit ihm.

00:23: Er war nämlich nicht gerade der stillste und aufmerksamste Schüler.. Hochbegabt ihr kennt das ja!

00:28: Sarah: So wie ich!

00:29: Lehrer: Ja es sind einige Hochbegabte hier in der Klasse, das kenn ich schon, Ja!

00:33: Also jedenfalls einmal hatte Gauß den Bogen mal wieder so richtig überspannt und sein Lehrer dachte sich: "So den beschäftige ich jetzt für die nächsten paar Stunden!"

00:43: Und gab ihm die Aufgabe die Zahlen von 1 bis 100 alle aufzuaddieren.

00:50: Als grad der Lehrer sich wieder setzen wollte und seine Ruhe genießen wollte, da legte ihm Gauß auch schon sofort die richtige Antwort auf den Tisch.

00:58: Könnt ihr euch vorstellen wie der Gauß das so schnell gemacht hat? Probiert doch jetzt mal selber!

01:07: Lehrer: So jetzt haben wir also gesehen, dass wir die Zahlen von 1 bis 100 addieren können, indem wir sie in der Hälfte zusammen klappen

01:15: und dann jeweils zwei davon zu 101 zusammen addieren.

01:21: Wenn man sich das jetzt mal überlegt, dann sind es doch hier insgesamt 50 solcher Paare.

01:30: Und…Naja und die 50 können wir jetzt schreiben - n = 100 - als 50 = n/2

01:42: Und naja wir nehmen jetzt 50 mal den 101.

01:49: Jetzt drücken wir die 101 auch nochmal als n aus: also n war 100. Und 101 ist dann einfach n+1! Also 101=n+1

02:05: Und wir müssen nehmen 50 mal 101 und das schreib ich uns jetzt einfach nochmal in n hin. Einverstanden?

02:13: Also ich schreibe jetzt hin: n/2 * (n+1)

02:25: So, guckt mal hin! Jetzt zieh ich das Ganze noch einfach auf einen Bruchstrich. Und dann steht da:

02:32: n Halbe mal n plus 1, oder n mal n+1 Halbe. Kommt euch die Formel bekannt vor?

02:47: Ja der Gauss das war schon einer.. echt wahr!

02:51: Ich könnte euch da Stories erzählen von dem.. echt voll krass!

Teach@TUM wird im Rahmen der gemeinsamen „Qualitätsoffensive Lehrerbildung" von Bund und Ländern aus Mitteln des Bundesministeriums für Bildung und Forschung gefördert.

GEFÖRDERT VOM
Bundesministerium für Bildung und Forschung